Du nécessaire en mathématiques

I. Caractères généraux affectant toutes recherches sur le nécessaire.

Inadéquation relative résultant de leur caractère nécessairement empirique.

Le nécessaire partage avec toutes les notions qui marquent dans leur ordre un maximum, le privilège d'échapper au discours des hommes. Réfugiées en leur transcendance, elles condamnent toute recherche les concernant à une sorte d'inadéquation. Force est de se résigner à des conclusions approximatives, en ce sens qu'elles ne font qu'approcher l'objet. Et ce parti qui contraste toujours avec le caractère absolu de ce dernier devient, dans le cas du nécessaire, d'autant plus sensible que celui-ci se retrouve dans tous les ordres et jouit en quelque sorte d'un caractère transcendental. Nous ne pouvons partir que de l'expérience, du fait constaté, qui jamais ne se présente absolument pur, dans lequel il faut discerner la part de contingence et la part de nécessaire, à propos duquel il faut montrer qu'un tel partage est légitime, indépendamment duquel il faudrait établir en rigueur que ce partage est nécessaire. C'est ce dernier point qui semblera nous fuir, même dans le cas des mathématiques, et là est l'irrationnel auquel, d'emblée, nous nous heurtons. Eussions-nous d'ailleurs possibilité de partir de faits absolument nécessaires, que notre recherche demeurerait, elle, disproportionnée, puisqu'elle est le fait d'esprits atteints de contingence. Le « bonum ex integra causa » semble valoir ici avec un singulier a fortiori : avant toute définition, c'est-à-dire avant tout essai de rationalisation, il est immédiat à l'esprit qu'on ne devrait en rigueur accéder au nécessaire que par étapes nécessaires. Cette loi s'impose d'autant plus qu'on traite non pas de telle nécessité, mais du nécessaire comme tel, formellement entendu ; mais c'est dans une même vue que l'esprit prend conscience

des exigences de cet ordre absolu et sent lui échapper les données qui en constitueraient le point de départ homogène : comme s'il ne percevait implicitement le nécessaire que dans l'évidence de sa propre contingence.

Il ne faudrait pas conclure de là que le nécessaire ne soit qu'une donnée imaginative, aussi claire d'apparence que privée de réalité. Nous ne nions pas l'être parce qu'il nous dépasse, mais nous voyons dans la complexité sans cesse renaissante des démarches qu'il autorise l'indice d'une simplicité sur laquelle nous n'avons pas prise. Ainsi en va-t-il du nécessaire qui, par le jeu d'alternances imperceptibles, joint à la simplicité de l'être une simplicité logique idéale. Les mêmes analyses réitérées et convergentes qui discernent l'être, discernent cette qualité qui en accompagne toutes les manifestations, contingence ou nécessité ; et tout de même que ces dernières analyses tendent à une affirmation nécessaire et objective, celles que l'esprit fait porter sur ses propres démarches sont comme autant d'ébauches de l'acte idéalement simple dans lequel l'affirmation de lui-même coïncide avec l'affirmation première de l'être. C'est dans cet acte à la fois un, parce qu'il est acte, et mixte, parce qu'il est simultanément être et pensée, que l'esprit rencontre le nécessaire. C'est dire que le nécessaire se tient en droit dans l'au-delà de toute recherche, mais qu'il ne cesse d'inspirer l'intuition à laquelle il semble se dérober. Il la marque d'ailleurs de son effigie : il n'est en effet aucun cas sinon celui qui nous occupe où l'on puisse dire d'une recherche qu'elle est nécessairement inadéquate. Ainsi le nécessaire se laisse-t-il saisir négativement, mais néanmoins très réellement, puisqu'il abstrait par nature de ses modes de réalisation, qu'ils soient négation ou affirmation. En sorte que toutes les difficultés qui paraissent s'accumuler contre cette notion se retournent implicitement en sa faveur. En quoi il n'y a encore que constatation, mais il deviendra aisé, par ce qui suit, de discerner là l'effet d'une stabilité propre au nécessaire et qui le masque sous d'apparentes oscillations.

Nous nous proposons, après une étude quasi expérimentale du nécessaire, de rattacher la notion de nécessaire à son fondement métaphysique et de montrer comment, dans le passage du second au troisième degré d'abstraction, l'identité de structure d'une part, l'autonomie relative des champs d'application d'autre part, sont des faits complémentaires, ou plus exactement deux aspects : c'est seulement à notre échelle que l'unité de droit de

l'intelligible et de l'existant se distribue en oppositions relatives. *Les embarras de vocabulaire soulignent ce caractère empirique.*

Il ne sera pas inutile de donner quelques précisions au sujet du vocabulaire : la multiplicité des expressions, leur emploi presque indifférent les unes pour les autres ne font d'ailleurs qu'exprimer un contraste déjà relevé : celui de la complexité avec laquelle se présente une idée simple en elle-même.

Etant supposées acquises quelques notions premières : être, acte, affirmation, négation, nous appellerons *déterminé* ce qui peut s'exprimer adéquatement en fonction de l'acte par affirmation ou négation ; et c'est une première acception, plus ontologique. Il en est une autre, plus logique celle-là : Est *déterminé* ce qui est transcriptible en caractères ou groupes de caractères qui se superposent à l'intérieur d'un genre univoque. Le contexte indiquera d'ailleurs à laquelle de ces acceptions il convient de se référer. L'*impossible* est du déterminé par mode de négation. Le *possible* n'est pas du déterminé, et nous pouvons même, formellement parlant, le faire équivaloir à du non-déterminé, c'est-à-dire à l'indéterminé.

Le *déterminisme* est un ensemble, d'ailleurs ouvert, de correspondances d'ordre à la fois qualitatif et quantitatif entre des éléments déterminés et homogènes. Ensemble ouvert, par là-même qu'il y a toujours possibilité de le prolonger soit par l'adjonction de nouveaux éléments, soit par la résolution en correspondances plus radicales, de correspondances déjà existantes. Le *déterminisme,* c'est encore la formation abstraite de ces mêmes correspondances avec une dominante mise sur le point de vue quantitatif.

Le *nécessaire* c'est ce qui ne peut ne pas être ; ou bien ce qui ne peut pas être autrement qu'il est, supposé qu'il soit. Notons en passant que ces deux définitions impliquent celle du possible, ce qui suffirait à montrer qu'elles sont d'ordre descriptif : l'ordre réel, lui, devrait procéder à partir du nécessaire qui en quelque façon demeure ineffable.

Est *nécessitant* ce qui implique, soit pour en être le principe, soit pour en être la conclusion, une conséquence et un enchaînement nécessaire : cette définition s'appliquant d'ailleurs aussi bien à l'ordre réel qu'à l'ordre logique, ou à tout autre s'ajustant à ces deux là.

Enfin nous réservons le nom de *nécessité* au cadre nécessitant

qui s'impose aux choses du dehors et qui se distingue du *nécessaire* comme l'extériorité de l'intériorité. Ainsi les lois métaphysiques et les démonstrations directes relèveront du *nécessaire ;* les lois physiques et les démonstrations par l'absurde de la *nécessité.*

Nous n'avons fait en ce qui précède que relever des assertions de sens commun : elles indiquent clairement deux grandes directions, en fonction desquelles chacun des termes mentionnés revêt une dualité de signification. Pour faire bref nous distinguerons : l'*aspect* « F », à savoir celui du fait et de l'existant, et l'*aspect* « I », à savoir celui de l'intelligence et de l'être logique. Ainsi la *nécessité F* est la propriété de ce qui s'impose comme existant et la *nécessité I* la propriété de ce qui s'impose au titre de conclusion logique. On appliquerait cette même distinction à chacun des termes précédents ; on emploiera cependant le mot *nécessaire* sans qualification pour désigner le complexe formé par ses deux aspects. Enfin, bien que traitant du nécessaire en mathématiques principalement, nous avons à considérer cette même notion en métaphysique. Nous désignerons par μ le *type* mathématique du nécessaire et par φ (υσις) le *type* métaphysique. Il y a évidemment affinité entre le *type* μ et l'*aspect* I d'une part, entre le *type* φ et l'*aspect* F d'autre part, mais il serait aussi arbitraire qu'erroné d'identifier chacun des aspects au type qui lui correspond. Tout notre propos est de montrer que dans chacun de ces deux types se retrouvent les deux aspects et que l'unité du nécessaire s'explique par leur équilibre permanent.

II. Le nécessaire en mathématiques.

A. Le fait et les catégories du nécessaire en mathématiques.

1. *L'affirmation du sens commun touchant le nécessaire en mathématiques.*

Le prototype de l'évidence et de la nécessité est, au regard du bon sens, fourni par le jugement mathématique : clair comme 2 et 2 font 4. Il y a là plus qu'un aphorisme : les nombres et les calculs, surtout s'ils sont laborieux, ont pour beaucoup tout le prestige de lois intangibles : les artilleurs croient à leur table de tir, beaucoup plus qu'aux reportages des observateurs, malgré les louables efforts que tentent pour les débarrasser de cette illusion

ceux qui construisent les dites tables. Le calcul procède par enchaînements nécessaires, et il est évidemment impossible qu'il se trompe. Les philosophes ont un comportement un peu différent, et leur correcte circonspection recouvre parfois assez mal un scepticisme un peu méprisant. Au demeurant, le bon sens et le philosophe s'accordent parfaitement ; le bon sens voit l'endroit et le philosophe l'envers : une réceptivité non prévenue voit dans les mathématiques la nécessité I et supplée un peu naïvement à l'aspect F ; une attitude plus critique ressentant la déficience de l'aspect F tend à refuser l'aspect I. La naïveté et le scepticisme se rejoignent dans une commune conclusion : les mathématiques peuvent au maximum revendiquer la nécessité I.

Que cette conclusion n'aille pas au fond des choses, c'est ce qui résulte de deux remarques : Poincaré a donné une démonstration des jugements du type $2 + 2 = 4$, c'est-à-dire que le bon sens ne remonte pas assez loin dans la voie analytique et que l'intuition qu'il croit avoir du nécessaire recouvre au vrai un complexe qu'il faut résoudre. Cette résolution peut faire réapparaître des nuances qu'une première approximation confondait. Il serait d'autre part illégitime de penser qualifier adéquatement une réalité par des caractères exclusivement négatifs ; il y aurait là un manque de pénétration auquel le métaphysicien de profession pourrait être enclin : la surdité n'est pas une garantie pour appliquer à la musique les lois de l'être en tant qu'être.

2. *Il existe cependant en mathématiques un nécessaire qui dépasse cette représentation.*

L'univocité qui règne dans le domaine mathématique est loin d'y exclure les temps logiques : le nécessaire, jouant à chacun d'entre eux un rôle qu'on doit attendre divers, recevra corrélativement des qualifications diverses. C'est qu'en effet, la nécessité n'est pas en mathématique une qualité surérogatoire. Constituant la condition nécessaire et suffisante pour qu'une proposition soit authentiquement mathématique, elle doit refléter par sa nature l'état de cette proposition. Probables, puis démontrées, puis insérées dans une synthèse, les vérités mathématiques ont une vie ; elles ne deviennent pas plus nécessaires, mais nécessaires à de nouveaux titres. Les démonstrations en se multipliant ne font pas double emploi : de l'enchaînement initial qui établit un théorème, à l'intelligence de sa signification, il y a un écart assez semblable

à celui qui sépare le fait observé du fait compris et interprété. Sans doute le fait mathématique est toujours en dépendance d'une nécessité I, mais dès là que l'observation la plus élémentaire contraint de distinguer des nuances dans cette nécessité minimum, il est impossible de ne pas faire état de l'analogie que présente avec une expérience plus large celle qui est propre au cas mathématique. D'une proposition démontrée on voit bien qu'elle ne peut pas ne pas être, elle a l'existence mathématique ; mais on ne voit pas pour autant qu'elle ne peut pas être autre qu'elle est. Etablir une relation entre deux groupes d'éléments, n'établit pas de soi pourquoi cette relation est telle : le langage consacre cette distinction, qui parle de « faits » de calcul quasi inintelligibles et cependant inéluctables : il n'y a pas à comprendre pourquoi le nombre des paramètres d'un groupe simple ne peut avoir que l'une des quatre valeurs fixées par M. Cartan, mais on comprend bien par le théorème de Painlevé les propriétés des solutions de l'équation de Ricati. La première proposition encore qu'exhaustive, demeure particulière et comme fermée sur elle-même, elle reflète à l'intérieur du domaine mathématique l'aspect F du nécessaire. La seconde tout en possédant la nécessité F est susceptible d'être rattachée à une synthèse plus générale dont elle reçoit une nécessité I. Ainsi paraît-il légitime, à simple inspection, de conserver pour le nécessaire de type μ la dichotomie signalée en général : nécessité F et nécessité I. Il faut cependant, pour le confirmer, établir d'une part qu'il n'existe pas d'autre aspect de la nécessité et d'autre part qu'il s'agit bien d'une dichotomie irréductible.

Quant au premier point, nous nous heurtons à la difficulté signalée au début : part qu'il faut consentir à l'empirisme dans une recherche qui de soi l'excluait. Il y a cependant tout lieu de penser que nous épuiserons tous les cas en envisageant l'ensemble des développements mathématiques. Hypothèses, recherches, conclusions, telles sont les étapes que la commodité didactique y distingue. Les remarques qui précèdent se sont attachées surtout aux conclusions. Les hypothèses et la recherche fournissent-ils d'autres aspects du nécessaire ? Des premières vraisemblances à l'ébauche d'une démonstration, l'esprit semble ne pas cesser d'être guidé : il y a des sillons qu'il faut rencontrer et c'est cette rencontre qui règle les rôles respectifs de l'initiative et de la déduction. Mais nous avons déjà observé cette sorte de nécessité jouant à plus vaste échelle : la découverte d'une proposition particulière n'a pas d'autre

loi que l'évolution générale de la science ; celle-ci d'ailleurs est faite de celle-là et on retrouve ici et là le même caractère d'incertitude apparente voilant cet aspect plus souple du nécessaire que nous avons appelé nécessité I. D'autre part les hypothèses que l'on est amené à faire peuvent ou bien demeurer arbitraires ou bien recevoir des conséquences qui en découlent, soit infirmation, soit confirmation. Dans le dernier de ces trois cas elles possèdent une nécessité I dans la mesure où elles se trouvent intégrées à une synthèse qui les dépassent ; dans les deux premiers elles constituent un fait, positif ou négatif, acquis par un processus plus complexe ou plus simple que la démonstration ordinaire, mais on ne voit pas qu'il y ait pour autant qualification intrinsèque nouvelle du nécessaire : c'est pour ainsi dire la proportion des deux aspects que nous avons discernés qui changent d'un cas à l'autre ; leur combinaison n'introduit pas de nouvel élément : c'est la même nécessité F qui se retrouve dans l'hypothèse arbitraire et dans le fait de calcul qui en est l'aboutissant, et c'est la même nécessité I qui englobe l'hypothèse justifiée et les conséquences qui la justifient. Nous observons simplement une certaine homogénéité du nécessaire envisagé selon chacune de ses espèces.

D'ailleurs le nécessaire étant de soi une notion simple, il paraît plus cohérent de n'en multiplier les espèces que s'il est manifestement contradictoire de ne pas le faire : or la nécessité F a un critère bien net, la constatation quant au type φ, la définition ou la démonstration quant au type μ. On pourrait alors, se plaçant à un point de vue logique, appeler nécessité I toute nécessité qui n'est pas nécessité F. L'absence de motif pour pousser plus loin la subdivision permet de présumer l'équivalence approximative des deux définitions de la nécessité I, l'une positive et appuyée sur un contenu expérimental, l'autre négative et procédant d'une préoccupation logique.

Si cette équivalence était rigoureusement établie, la seconde des questions que nous posions se trouverait résolue : si en effet les deux aspects du nécessaire sont susceptibles d'être définis par opposition de contradiction, il est bien clair qu'ils sont irréductibles, mais nous devons au moins inférer cette irréductibilité en nous tenant à la seule définition positive de la nécessité I. Or il y a de l'aspect F à l'aspect I une opposition semblable à celle que soutiennent le déterminé et l'indéterminé : la nécessité F excluant comme telle la possibilité d'achèvement sur laquelle repose la

nécessité I. De plus, si l'opposition F-I ne dérivait pas de la nature réelle du nécessaire, il faudrait l'inscrire au compte du travail de l'esprit. Mais comme elle s'impose nécessairement, on retomberait en fait sur la même dichotomie qu'on prétendait illusoire : le nécessaire inqualifié se substituant à la nécessité F et les propriétés qu'il développe dans l'esprit, à la nécessité I. Ainsi se trouve confirmée la perception d'ordre supra-rationnel qui distingue les nuances du nécessaire et qui, notons-le, ne rencontre l'absolu que dans le relatif : la même proposition peut se trouver affectée de l'une ou l'autre nécessité selon qu'on l'envisage comme conclusion de démonstration ou comme élément d'une synthèse qui l'explique. Les nuances du nécessaire s'attachent — et ceci nous est un précieux indice — à des fonctions ou, dans un autre vocabulaire, à des relations. Notons enfin que la nécessité I se trouve plus voisine que l'autre du nécessaire. Il est en effet loisible dans une perspective d'explication qui repose sur la notion de totalité, de s'arrêter à une synthèse particulière qui provisoirement fera fonction du tout ; tandis que la suite des conclusions qui livrent la nécessité F est *de soi* illimitée, et par cette indétermination diverge partiellement d'avec le nécessaire.

3. *Ce qu'il convient de retenir de l'intuition de sens commun.*

Le nécessaire μ exige donc la distinction que le sens commun a constatée par une expérience plus étendue, mais dont précisément il exclurait volontiers le cas mathématique. Nous retenons avec lui que le nécessaire constitue une sorte de loi du seuil à laquelle doivent satisfaire les propositions pour pénétrer dans le domaine mathématique, mais nous ajoutons que ce minimum requis n'épuise pas tout le nécessaire inclus dans ces propositions. Nous retiendrons encore avec le sens commun que cette nécessité minimum est très représentative de l'aspect I, mais nous ajouterons que rien n'autorise à transformer cette similitude en identité. Il est fort opportun de remarquer que, comparé aux autres, le cas mathématique souffre d'un déséquilibre essentiel qui interdit à la notion de nécessaire de s'y réaliser pleinement. Il n'en résulte pas qu'elle ne puisse s'y réaliser analogiquement d'une façon parfaite. C'est, à notre sens, fausser la réalité que de suppléer l'aspect F déficient, en appuyant la nécessité mathématique sur une nécessité F du type φ. C'est faire s'infléchir la loi du seuil à un niveau beaucoup plus modeste, refouler le nécessaire dans des régions in-

accessibles, et déclarer implicitement que l'esprit n'a pas prise sur lui. Nous avons vu et nous essayerons de confirmer que les faits déjà invoqués sont susceptibles d'une autre interprétation ; elle pourra d'ailleurs se réclamer de ce qu'il y a de plus profond dans l'intuition du sens commun : le nécessaire intègre en droit l'un et l'autre aspect (F et I). Comment le cas mathématique se prête, aussi bien que tout autre, à établir cette vérité, pourvu qu'on fasse abstraction du contenu matériel dans lequel s'exprime la nécessité I et la nécessité F — cette dernière surtout — pourvu en un mot qu'on raisonne très formellement sur leur relation, c'est ce qu'il faut examiner.

B. Les deux aspects du nécessaire mis en relation avec leurs principes.

1. *La nécessité F, la loi d'enchaînement et l'identique.*

La distinction de deux aspects du nécessaire n'est encore qu'un fait — selon notre terminologie, une nécessité F, — il convient d'en rendre compte en analysant la nature de chacune de ces deux nécessités. Les propositions qui sont sous le régime de la nécessité F se présentent généralement comme des vérifications ; il en est même qui pourraient déjà s'imposer par des raisons extra-mathématiques, — physiques par exemple. A ce stade élémentaire, notre assertion demeure étrangère au domaine mathématique, mais elle apparaît du moins avec beaucoup de clarté ; et si le cas mathématique de la nécessité F se trouve si aisément en contact avec le cas physique, il est à présumer qu'un même facteur doit jouer dans l'un et l'autre le rôle essentiel. L'expérimentation qui établit le fait physique a bien son répondant dans la vérification. La plupart des démonstrations se présentent aux regards inexpérimentés ou indolents comme une simple vérification, et l'on sait le rôle joué dans l'esprit des débutants par les artifices de calcul. Il y a là au moins un procédé commode d'exposition et des exposés trop bien faits rejoignent à ce point de vue le parti pris de demeurer élémentaire : dans l'un et l'autre cas on cherche à éliminer toute apparence de difficulté et à conduire l'esprit sans heurt de l'hypothèse à la conclusion. La simplification est d'ailleurs souvent illusoire parce qu'elle a pour effet de rendre inintelligible l'impeccable succession des égalités : la première condition pour comprendre, c'est

de voir ce qu'il y a à comprendre : une démonstration bâtie sur le type de la nécessité F ne fait pas droit à cette exigence. Il convient d'ailleurs d'ajouter que cette mise en évidence de la difficulté réelle résulte généralement de la comparaison de plusieurs démonstrations, ou d'un progrès ultérieur notable, et c'est pourquoi elle échappe souvent à ceux qui découvrent comme à ceux qui, débutants, ne font que découvrir pour eux-mêmes. Nous schématisons d'ailleurs un peu : il est clair qu'une démonstration, si gauche soit-elle, implique chez son auteur une pénétration de l'objet qui sera inégalement partagée : connaître les raisons de l'« inventio » n'est certainement pas connaître les raisons du fait lui-même, mais c'est plus que de se borner à constater la validité logique d'un système de propositions. C'est ce dernier cas qui est par excellence celui de la nécessité F : qu'on songe par exemple aux formules algébriques de résolution des équations du troisième ou quatrième degré exposées indépendamment du point de vue de Galois. La nécessité semble se réduire ici à un pur enchaînement qui le plus souvent demeure dans son inspiration tout à fait empirique.

Nous sommes donc ramenés à examiner la nature d'un tel enchaînement. Or elle se reflétera également dans l'une quelconque de ses parties, par là même que celles-ci sont comme inorganiques et ne font qu'engendrer par leur juxtaposition une unité en quelque sorte négative. La cellule élémentaire de l'enchaînement, c'est évidemment l'identité, identité mathématiquement entendue, c'est trop clair. Il n'en résulte d'ailleurs pas que cette identité soit d'ordre quantitatif : la géométrie offre l'exemple du contraire, en reliant des structures discontinues, concrètes ou concrétisables ; et l'analyse vise davantage les équivalences idéales que les égalités. On observera même que l'allure générale d'une branche déterminée de la science résulte précisément de la nature de ces relations élémentaires : l'identité qui préside à l'*analysis situs* n'est pas celle qu'on rencontre en géométrie ordinaire. Cette remarque conduit à distinguer dans l'identité deux aspects, l'un matériel : par exemple l'homéomorphie en *analysis situs*, l'égalité de longueur en géométrie, — et on mesure par là l'importance que joue l'identique même du point de vue le plus pratique. L'autre aspect, plus formel, et qui concerne davantage le point de vue philosophique où nous nous plaçons, c'est une permanence, une notion du même qui se retrouve dans toute identité indépendamment du domaine où elle prend corps. C'est ainsi, formellement

pris, que l'identique se révèle principe de l'enchaînement. Il paraît en effet d'une part impossible de remonter plus avant dans la voie analytique à moins d'arriver à une notion absolument simple, à l'identique qui ne serait plus relation à un autre, mais relation à soi-même, et toute trace du passage, requis cependant à un enchaînement conceptuel, se trouverait ainsi éliminée : certains êtres logiques dont l'existence consiste en la pure substitution d'un système de signes à un autre pourraient peut-être trouver l'expression adéquate de leur nature dans cet identique absolument simple, mais les démonstrations mathématiques ont toujours un caractère plus dynamique. D'autre part l'élaboration abstractive qui tente de rendre compte de l'enchaînement n'est assurée d'en rencontrer la vraie nature que si l'élément qu'elle discerne convient à tous les cas : il est dès lors impossible de conserver la matière d'aucun d'entre eux et partant de remonter moins loin que nous ne faisons.

Ainsi la nécessité F se ramène à l'enchaînement, et celui-ci à l'identique formellement entendu. Mais l'identique est, *de soi*, fait pour se concrétiser en des identités en regard desquelles la nécessité demeure, *de soi* également, une qualité abstraite ; et par ce rapport du concret à l'abstrait s'explique que le nécessaire déborde l'identique comme l'universel dépasse les individus dans lesquels il se réalise. Notons enfin que notre analyse partie d'un aspect du nécessaire qui s'impose comme un fait, tend à aboutir à un autre fait : l'identique parfaitement simple, qui est comme la limite de toute relation d'identité, ne peut être en effet que pure affirmation. Nous constatons encore une fois l'homogénéité et d'une façon sous-jacente la simplicité propre au nécessaire.

2. *La nécessité I, la loi d'harmonie et le simple.*

Et c'est cette simplicité que nous retrouverons plus accusée encore par l'analyse de la nécessité I. La dichotomie que nous avons posée conduirait logiquement à cette seconde partie de l'enquête, mais il est intéressant de noter qu'elle est en quelque sorte appelée par la première. La nécessité F repose sur l'enchaînement, mais l'exemple n'est pas rare d'un même fait susceptible de plusieurs démonstrations. En d'autres termes la nécessité F implique non pas un enchaînement unique, mais la notion d'enchaînement, en tant qu'elle se retrouve identique à elle-même dans une pluralité d'enchaînements. Or si l'on tient que, formellement, l'identique implique le nécessaire, un nouvel aspect du nécessaire doit

correspondre à ce nouvel aspect de l'identique que présente un ensemble convergent d'enchaînements. Ainsi la nécessité F débouche-t-elle nécessairement sur la nécessité I, et il y a là un témoignage rendu au nécessaire par toute recherche le concernant : les étapes ne peuvent en être seulement juxtaposées mais soutiennent entre elles des connexions elles-mêmes nécessaires.

Existe-t-il dès lors une notion qui serait à la nécessité I ce que l'identique est à la nécessité F? La première propriété qui se présente comme attenant à la nécessité I, c'est l'invariance. La nécessité F demeure invariante quand on substitue une démonstration à une autre ; la nécessité I, c'est, dans ce cas au moins, l'état de convergence de tous les enchaînements possibles : elle demeure elle-même en chacun d'entre eux parce qu'elle en fait abstraction, sans cesser de les impliquer. La nécessité F au contraire, qui est la propriété de la conclusion, abstrait totalement de la nature de ces enchaînements ; elle n'y voit que des faits numériquement distincts, mais tous rigoureusement équivalents. On observerait cette même invariance de la nécessité I si on envisageait celle-ci à une plus vaste échelle. Inutile de nous y attarder. Notons seulement qu'on pourrait caractériser la nécessité I comme étant précisément quelque chose qui demeure inchangé sous des inspirations et des expressions parfois notablement divergentes : c'est un même besoin d'intelligibilité qui a commandé les intuitions, pourtant si opposées par ailleurs, de Newton et de Leibniz : nous dirons qu'une même nécessité I a entraîné deux nécessités F distinctes. Nous reviendrons d'une façon plus générale sur l'invariance comme condition *sine qua non* du nécessaire.

Poussons un peu plus loin l'analyse sans quitter le domaine mathématique. On sait le rôle joué par les invariants dans toute transformation. Ce sont en général des éléments distingués d'avec les éléments voisins parce qu'ils marquent un *extremum* (qu'on songe à la distance de deux points relativement au groupe euclidien). Ce comportement est de nature à éclairer celui de la notion d'invariance : elle paraît liée elle-même à une notion d'*extremum*, d'adéquation, de mesure. C'est une même nécessité I qui lie les fractions continues aux nombres fractionnaires et les polynomes de Tchebitcheff aux fonctions ; or si les deux cas sont assez semblables pour qu'il ne s'en dégage qu'une seule impression de nécessité, c'est que, dans l'un comme dans l'autre, il s'agit d'une approximation maximum réalisée dans un maximum de simplicité.

Dans les deux cas il y a un *extremum* qui se traduit non par deux inégalités, mais par deux systèmes d'inégalités de nature bien différente. Ce dernier point ne fait que souligner combien les notions elles-mêmes sont indépendantes des conditions de leurs réalisations : en l'espèce, l'*extremum* pris en un sens très souple et très large suffit à assurer l'invariance notionnelle en quoi consiste la nécessité I. On passe au fond de la nécessité F à la nécessité I plus souple, en assouplissant également la notion d'identique et en l'interprétant non plus d'une égalité — fût-ce une égalité de structure, — mais d'une similitude de notions.

Faisons un pas nouveau. La nécessité I rejoint la notion d'*extremum* ou d'adéquation par l'intermédiaire de l'invariance; cette adéquation a une désignation logique qui met en relief sa qualité essentielle. Sont adéquats les raisonnements qui procèdent *ex propriis*, et ils réalisent bien la notion d'*extremum*, non plus dans l'ordre quantitatif, mais dans l'ordre sémantique : le signe en est que ces raisonnements empruntent le plus petit nombre possible de médiums. La fraction continue ou les polynomes de Tchebitcheff réalisent bien la meilleure approximation, mais leur véritable intérêt c'est qu'ils permettent cette approximation idéologique maximum qu'est la substitution d'une notion à une autre. Or cette approximation n'est possible que grâce à une définition qui en serre d'assez près la nature selon le cas envisagé, c'est-à-dire qui procède *ex propriis*. Enfin le raisonnement *ex propriis*, par là même que les intermédiaires qu'il met en œuvre ont entre eux un contact très profond et très étendu, réalise le maximum de simplicité. Nécessité I, *extremum*, limpidité et clarté, tel serait l'enchaînement indiqué par l'expérience mathématique. En transposant au plan des notions il faut dire : nécessité I, adéquation, *ex propriis*, simplicité. En sorte que la nécessité I paraît être réductible au *simple* comme la nécessité F l'était à l'*identique*. Il ne s'agit d'ailleurs évidemment pas de la simplicité que nous avons exclue de l'identique parce qu'elle le rendrait impropre à toute démonstration mathématique, mais de cette simplicité très riche d'organismes qui peuvent être très complexes. Il semble que la nécessité I vienne coïncider avec la simplicité organique immuable des argumentations *ex propriis*. On voit par là combien discerner cette simplicité peut être délicat et relève d'un tact supérieur beaucoup plus que d'une énumération des éléments d'une démonstration; il y a des complexités apparentes qui ne doivent pas donner le change. On voit encore

comment le détour que nous avons emprunté est une sécurité. Il est au fond assez intuitif que le nécessaire et le simple sont en étroite relation, mais cela servirait de peu si l'on ne donnait quelques critères sûrs de la simplicité authentique : les intermédiaires que nous avons indiqués en sont. Cette résolution dans le simple du second aspect du nécessaire est l'effet d'une harmonie propre au domaine mathématique, et que la rigueur des lois d'enchaînement n'exprime pas. Chacun des enchaînements possibles repose sur l'identique, leur ensemble aboutit à une unité simple, mais il possède une harmonie qui est au cours d'une recherche le seul critère du vrai. Et comme le nécessaire se tient dans l'au-delà de la nécessité F, ainsi l'harmonie se tient-elle dans l'au-delà de l'identique. C'est un premier contact entre le beau et le nécessaire, il en est d'autres. C'est de même façon que la notion d'*extremum* se rencontre dans le beau et dans le nécessaire : elle caractérise un élément distingué, et en lui-même parfaitement déterminé, sans pour autant lui conférer l'unicité. D'autre part la nécessité I prend appui sur la nécessité F : elle l'explique, puis elle y aboutit; or la nécessité F est, nous l'avons vu, l'équivalent de l'existence dans le cas mathématique, et en même façon, c'est seulement dans l'existence que se résout l'irrationalité du choix entre plusieurs formes de beau, toutes également possibles. Ainsi le nécessaire par son aspect le plus intelligible, la loi d'harmonie qui est l'expression adéquate du beau, le simple enfin, qui est limite idéale, se trouvent en mathématiques étroitement conjugués et correspondent par une sorte de parallélisme à notre première trilogie : nécessité F, enchaînement, identique. Cette correspondance s'est d'abord présentée à nous comme une opposition : les deux aspects du nécessaire sont en effet formellement irréductibles, aussi bien par leur situation en regard du déterminisme que par le sens des démarches auxquelles, respectivement, ils se trouvent liés : régression analytique ou évolution vers des synthèses toujours plus achevées. L'opposition ne semble pas être le dernier mot de cette correspondance : si le nécessaire déborde l'identique, il trouve son achèvement idéal dans le simple, en sorte que les distinctions que la rigueur oblige de tenir, semblent à un autre point de vue se résorber dans une convergence plus ample, qui aurait pour limite le simple. Ainsi sommes-nous conduits, cette fois encore d'une façon quasi nécessaire, à examiner le comportement réciproque des deux trilogies que nous avons

dégagées : nécessité F, enchaînement, identique ; nécessité I, harmonie, simple.

C. Analyse formelle de la nature du nécessaire en mathématiques.

1. *L'aporie.*

C'est l'analyse de ce comportement qui apportera la solution de la question que nous posions : quelle est la nature véritable du nécessaire en mathématiques ? Nous avons bien observé deux aspects de cette notion. Nous ne pouvons ni nous borner à cette simple constatation, ce qui serait éluder la question de droit, ni non plus ériger en principe sans autre critique une dualité qui peut avoir des composantes d'ordre divers et de valeur fort inégale. « L'expérience nous guide dans les choix qu'elle n'impose pas ». Cette judicieuse remarque que Poincaré appliquait au labeur technique, pourrait être mise ici à profit. Notre observation est une indication qui ne s'impose pas : un choix demeure qui ne peut s'appuyer que sur une nouvelle critique. L'expérience nous indique d'ailleurs un peu plus que la dualité d'aspects, puisqu'elle dispose très naturellement les éléments qu'elle discerne sur deux lignes distinctes mais concourantes, soulignant ainsi dans le simple une harmonie particulière avec le nécessaire.

2. *Le nécessaire paraît s'identifier avec la seconde trilogie.*

Il est souvent éclairant pour découvrir la nature des choses de les envisager dans leur progrès. Aristote notait avec un sens profond que l'on ne connaît bien que ce que l'on voit naître ; et le progrès est une naissance renouvelée. Peut-on parler d'un progrès du nécessaire ? C'est un point que nous aurons à élucider. Acceptons provisoirement comme un fait que la notion de nécessaire est en mathématiques au moins, susceptible d'une certaine évolution. Il ne s'agit évidemment pas du fait matériel de la démonstration de nouvelles propositions, c'est-à-dire de l'intégration de nouveaux cas au domaine du nécessaire, mais de la qualification nouvelle qui en résulte pour la notion de nécessaire. Or il est clair que de ce point de vue, la nécessité F se résorbe de plus en plus : non pas qu'elle devienne jamais négligeable, mais elle se trouve suppléée, et ceci de deux façons : l'interdépendance des propositions suffit très souvent à garantir l'exactitude de l'une d'entre elles à partir

des autres : il y a une relativité de la vérité en ce sens qu'elle affecte simultanément des ensembles ; et il n'est pas besoin d'une très longue expérience pour savoir le prix de certains recoupements, pour savoir, ce qui plus est, que ces recoupements arrivent toujours à se produire, et désignent avec évidence telle erreur demeurée jusque-là cachée. Une cohérence globale est un critère de vérité beaucoup plus sûr que l'exactitude d'une démonstration isolée. La nécessité I se construit à partir de la nécessité F, mais elle lui sert ensuite de mesure : « causae ad invicem sunt causae ». D'autre part l'aspect existentiel qui de prime abord paraît être le privilège de la nécessité F se reverse sur la nécessité I : ce qui en définive s'impose, c'est-à-dire ce qui mathématiquement existe, ce ne sont pas les propositions isolées mais bien les ensembles ; comme ils se portent garants de leurs éléments, ils reçoivent le bénéfice de la réalité qui s'attache à ces derniers.

Le progrès de la science met donc l'accent sur la nécessité I, et ce point, établi par la comparaison des deux aspects du nécessaire, trouverait confirmation par la seule considération de la nécessité I. Il est de fait que l'explication se fait non par régression, mais par évolution ; on se rend compte des propriétés particulières en les rattachant à des théorèmes généraux ; et ceci indépendamment de l'opposition souvent mentionnée de deux tendances : l'une qui ramène le transcendant à l'élémentaire, l'autre l'élémentaire au transcendant. Le recours aux propositions générales sera le même, que celles-ci relèvent du transcendant ou de l'élémentaire, et la valeur explicative touche son maximum dans cette vue qui saisit les propositions générales sous leur double modalité, chaque fois que cela est possible. La recherche des systèmes différentiels, qui admettent des groupes de Lie, peut être ramenée au point de vue élémentaire des équations linéaires et il faut alors s'attacher à l'ordre de certains déterminants, ou bien au point de vue groupe et c'est alors une question de structure qui est en cause. Par deux voies diverses le discontinu réapparaît sous le continu. On sait par ailleurs l'étroit parallélisme qui relie les équations intégrales aux équations linéaires : parallélisme qui se poursuit jusque dans le détail des conclusions, pourvu qu'on les prenne d'assez haut. Ainsi le progrès de l'explication s'effectue par une sorte de concentration sur elle-même de notre seconde trilogie : c'est dans l'harmonie de synthèses toujours plus étendues et plus compréhensives que se révèlent en leur pleine lumière quelques principes extrêmement

simples : en sorte que le progrès du nécessaire se trouve pour ainsi dire polarisé par celui de la nécessité intelligible, tandis que la nécessité F demeure toujours inchangée.

3. *La correction de subjectivisme.*

Il serait cependant prématuré de conclure de là que le nécessaire doive être formellement identifié avec la nécessité I. Le progrès du nécessaire n'indique pas nécessairement sa vraie nature, mais bien plutôt comment celle-ci se réfracte dans notre esprit. Qu'il n'y ait pas d'êtres mathématiques ni par conséquent de nécessaire hors l'esprit des mathématiciens, nul n'en doute ; il n'en résulte pas qu'il n'y ait pas une nature du nécessaire qui domine et mesure les conceptions diverses et parfois opposées que nous pouvons nous en faire : or c'est cette nature que nous cherchons à déterminer. Il convient donc d'examiner si la dominante mise sur la nécessité I résulte de la structure du nécessaire ou bien d'une composante subjective, qui appellerait une correction. Soulignons à nouveau que la nécessité I suppose la nécessité F prise à un stade élémentaire, mais qu'ensuite elle y aboutit. La solidité des déductions est comme une hypothèse préalable que l'intelligibilité des théories confirme par un contrôle global, tout comme cette intelligibilité devient peu à peu le seul fait digne d'être retenu. Les deux nécessités F et I ne sont pas des aspects successifs du nécessaire, mais simultanés et constamment impliqués l'un dans l'autre. Ce sont comme deux faces d'un même objet dont l'intérieur nous échappe, ou mieux comme deux versants qui vont se rapprochant à mesure qu'on les parcourt plus près du sommet d'ailleurs inattingible. La dualité qui apparaît si nette dans les cas élémentaires s'amenuise à mesure qu'on s'éloigne de ceux-ci. De là à conclure que cette épaisseur du nécessaire, qui autorise à y distinguer une intériorité idéalement simple et une extériorité de soi multiple, n'est qu'un effet d'optique mentale provenant de l'inaptitude de l'esprit humain à se mettre parfaitement au point, il n'y a qu'un pas.

Il est d'ailleurs assez banal de remarquer que les distinctions qui émaillent notre description de la réalité y sont souvent par nous introduites. Les scolastiques ne l'ignoraient point : leur catalogue si abondamment pourvu, de la distinction réelle aux ultimes distinctions de raison raisonnante, suffit à en faire foi : nous ne nous proposons pas de situer dans ce système de référence assez

particulier le couple de nos deux nécessités, mais de préciser indépendamment de toutes notations conceptuelles, dans quelle mesure une opposition, qui est une apparence de fait, appartient à la nature du nécessaire. Il convient donc pour raisonner, de se placer aussi loin qu'il est possible de l'apparaître, sans rien abandonner de la réalité, ce qui est très précisément considérer les essences, et, dans le cas qui nous occupe, l'identique et le simple respectivement expressifs de la nécessité F et de la nécessité I.

La contribution subjective et la correction corrélative deviennent alors assez sensibles : mis en regard de l'invariance, qui demeure un critère fondamental, le simple et l'identique — du moins tels qu'ils nous ont été livrés par l'expérience — n'ont pas le même comportement. Le simple inclut l'invariance à un seul degré, l'identique à deux degrés : invariance de la relation d'identité, invariance des termes qu'elle connote ; encore est-il que l'invariance des synthèses simples est plus idéale que réelle et demeure, en fait, compatible avec un certain progrès. Mais si l'on tente de considérer les notions en elles-mêmes — et il y faut cet effort de passivité que les métaphysiciens associent au troisième degré d'abstraction — le simple et l'identique ont rigoureusement la même immutabilité : car la relation d'identité se résorbe dans la simplicité d'un terme unique. Le simple et l'identique ne se distinguent plus que d'un point de vue exclusivement logique, le premier devenant, dans notre façon de comprendre, raison du second, alors qu'objectivement, le simple, l'identique, l'immuable sont rigoureusement convertibles. Les conséquences de cette remarque sont immédiates : si, déjà de soi, le simple est principe de l'identique, il est normal que la nécessité I, qui est le simple à l'état observé, paraisse tirer à soi tout ce que le nécessaire renferme de richesse intelligible. Mais la préséance logique de droit se trouve infléchie par l'existence et elle aboutit à cette dominante que nous avons constatée en faveur de la nécessité I. L'autre aspect — F — se trouve masqué par le développement de la science qui, dictant notre appréciation en sollicitant notre effort, nous contraint de regarder le nécessaire dans un sens déterminé, toujours le même, et qui va de la nécessité F à la nécessité I. Tout paraissant dériver de cette dernière, la relation entre les deux aspects du nécessaire cesse d'être parfaitement réciproque : la qualification d'une relation se modifie évidemment à mesure que l'implication de l'un de ses termes par l'autre devient plus profonde. C'est bien ce qui se passe dans notre cas : plus nous

redescendons vers l'aspect psychologique de la réalité mathématique, et plus le rôle de la nécessité I se fait prépondérant. Si nous tentons de saisir le nécessaire selon sa nature propre, — nous reconnaissons d'ailleurs que la limite est difficile à préciser du nécessaire μ en soi au nécessaire μ pensé, — nous devons donc rétablir une perspective partiellement faussée et restituer à la relation entre les deux aspects du nécessaire μ le caractère de réciprocité qu'elle perdait progressivement à mesure qu'elle tombait sous une observation directe.

Il ne reste qu'à conclure : le nécessaire (μ) n'est ni l'un ni l'autre de ses aspects, et il n'est pas plus l'un que l'autre. En droit la contribution sémantique des deux nécessités doit être la même quant à la construction de cette notion. On pourrait donc définir le nécessaire comme l'ensemble de ses deux aspects, mais on laisserait ainsi dans l'ombre un élément essentiel : les deux aspects F et I ne sont pas juxtaposés comme deux espèces d'un même genre ; ils s'impliquent en telle façon que poser l'un, c'est implicitement poser l'autre ; et en droit il n'y a pas à discerner, par les degrés de leur intensité par exemple, ces deux implications. Comme implications, elles sont de tous points identiques et expriment ainsi la parfaite réciprocité de la relation que soutiennent les deux aspects F et I. Il n'y a au fond qu'une seule implication qu'on peut envisager dans deux sens différents, comme il n'y a qu'une seule relation où on peut discerner deux termes. En cette relation, nous touchons l'intériorité du nécessaire (μ) et son essence : tout fait mathématique appelle l'intelligibilité : et il n'y a pas de construction intelligible qui ne doive s'incarner dans des faits — le fait étant, rappelons-le, la démonstration brutale qui repose sur l'identique. En nous arrêtant à la relation nous éliminons des éléments de contingence qui atteignaient encore, quoique d'une façon extrinsèque, chacun des deux aspects du nécessaire : le nécessaire devient une loi indépendante de la qualification ontologique des éléments qu'elle met en œuvre. Qu'il existe ou non des faits mathématiques, qu'il existe ou non une harmonie mathématique, il reste que leur relation est nécessaire et qu'elle vérifie l'un et l'autre aspect de cette notion. Nous proposerions donc de prendre comme définition du nécessaire (μ) : la relation parfaitement réciproque que soutiennent entre eux : la nécessité F et la nécessité I, la loi d'enchaînement et la loi d'harmonie ou enfin l'identique et le simple. Le fait, — observé celui-là — que les deux lois : enchaînement et harmonie,

sont toujours associées et s'étendent simultanément à de nouveaux cas, paraît d'ailleurs constituer une vérification de cette définition.

III. Le nécessaire μ comme cas du nécessaire " in genere „.

1. *Structure du nécessaire « in genere ».*

Il nous resterait, pour n'être pas trop incomplet, à rapprocher ce résultat de celui auquel conduirait une enquête plus philosophique. Nous sommes contraints de nous en tenir à de brèves indications. Nous avons noté l'invariance comme attribut essentiel du nécessaire ; c'est encore cette propriété qui récapitulerait au mieux, croyons-nous, toutes celles que l'esprit accorde spontanément au nécessaire, envisagé en général. Le nécessaire, c'est ce qui s'impose ; à l'inverse, nous nous imposons aux choses et nous avons prise sur elles par les changements que nous leur imprimons et donc à la faveur d'une possibilité de changement qui leur est supposée inhérente. Le nécessaire est donc ce qui exclut toute possibilité de changement. — Le nécessaire abstrait d'ailleurs du changement lui-même : il est comme un membre fixe de toute dichotomie portant sur l'être, et à un autre point de vue il est la seule catégorie qui demeure invariante par tout traitement logique (ἀνάγκη, ἀκίνητον : le rapprochement n'est pas d'Isidore mais d'Aristote en personne). Enfin le nécessaire élimine l'au-delà par là même qu'il marque un maximum : entre toutes les réalisations possibles, il est cette réalisation privilégiée qui exclut le plus et le moins, et ceci serait particulièrement sensible sur chacun de ses deux aspects — existentiel ou intelligible, — pourvu qu'on l'envisage formellement. Le changement se trouvant donc inscrit entre son principe et son terme, entre un en-deçà et un au-delà, c'est de tout point qu'il se trouve exclu par le nécessaire. Or il est facile de voir — et tout ce qui précède en serait une preuve suffisante — qu'un progrès, et par là une possibilité de changement, demeure à inscrire au compte du nécessaire tant qu'on disjoint celui-ci en ses deux aspects. On observera d'abord que les deux nécessités F et I ne sont pas équivoques, parce que leur propriété commune d'exclure le changement, encore qu'elle s'exprime négativement, dénote une communauté de nature ; parce que d'autre part, la nécessité I, ne pouvant résulter d'un décret arbitraire de notre esprit, qui ne peut s'affirmer comme nécessaire, suppose une existence qui la mesure, tandis qu'en

retour la validité incontestée de la science suppose que la nécessité F est susceptible d'une lecture intelligible. Il est donc légitime de parler du nécessaire non comme d'une notion composite, mais comme d'un analogue jouissant de l'unité de proportionnalité. Or si chacun des deux aspects du nécessaire formellement envisagé exclut le changement, le décalage alterné mais incessant qui existe entre eux est l'agent actif d'un progrès qui vise précisément une coïncidence toujours plus étroite de l'existant et de l'intelligible. Le nécessaire excluant, selon sa vraie valeur, ce progrès, il faut conclure qu'il exclut pareillement toute possibilité de déséquilibre entre ces deux aspects, ce qui ne sera réalisé nécessairement que s'il s'identifie avec chacun d'entre eux.

Or la seule catégorie avec laquelle s'identifient les aspects qui la réalisent, c'est la relation transcendantale. De par sa nature, le nécessaire se trouve donc adéquatement exprimable par la catégorie relation. On pourrait le définir comme la relation, en droit parfaitement réciproque et parfaitement équilibrée, de l'intelligible et de l'existant. L'être absolument nécessaire, c'est cette relation se résorbant dans l'identité. Nous n'avons pas loisir d'insister. Marquons brièvement les points de contact des deux analyses : que la relation qui définit le nécessaire soit inclusive, reflète le caractère de simplicité qui récapitulait le nécessaire μ ; qu'il y ait, dans l'être même de la relation, convertibilité de ses termes — nous ne disons pas équivalence — correspond à l'identique du cas μ de la relation : et l'on voit bien ainsi, mais d'un point de vue plus profond, comment le simple et l'identique ne sont que deux aspects d'une même réalité, le premier jouissant simplement d'une antériorité logique. En définitive, nos deux analyses convergent et tendent à s'identifier : il serait plus exact de dire qu'il n'y a qu'une seule analyse ascendante qui emprunte dans le cas μ un algorithme un peu particulier, et il n'y a pas là de quoi surprendre ceux qui ont une fois pris leur parti de l'ésotérisme mathématique.

2. *Qualification comparée du nécessaire en mathématique et hors des mathématiques. Confirmation de sa nature analogique.*

Il convient de prolonger cette même conclusion par une analyse descendante, laquelle cherchera à découvrir comment se réalise en fait cette stabilité de structure établie en droit pour le nécessaire. Nous devons d'ailleurs bien attendre — l'être ne se réalisant à notre échelle créée qu'en se diversifiant — une diver-

gence de qualification du nécessaire suivant au domaine où il s'applique. Cette unité dans le divers éclairera d'ailleurs le caractère analogique du nécessaire, non plus « comprehensive », mais « extensive ».

Notons tout d'abord que la définition posée ne peut avoir qu'un seul cas de réalisation — et ce serait un assez bon signe en sa faveur.

Il n'y a qu'une seule parfaite réciprocité et, pour employer une image spatiale, une seule position d'équilibre ; c'est seulement dans cette rigueur que se réalise le nécessaire : hors de là, il n'y a que du nécessaire approché, c'est-à-dire du non nécessaire, tout de même que l'équilibre approché n'est plus l'équilibre. La seule expression « plus ou moins nécessaire » se présente comme contradictoire, le nécessaire excluant le changement et, par là même, le plus ou moins. Il faut donc dire qu'il y a des cas plus ou moins semblables à celui où le nécessaire se réalise : nous continuerons cependant, pour faire bref, à parler des degrés du nécessaire. Si celui-ci consiste en la réciprocité de l'intelligible et de l'existant, les cas du nécessaire ou plus exactement du non-nécessaire, résulteront de la prépondérance prise par l'un ou l'autre aspect. Nous avons déjà noté la polarisation vers l'intelligible du nécessaire μ. Nous devons dire maintenant non plus polarisation, mais déséquilibre : exprimant ainsi que le nécessaire μ n'est pas le nécessaire authentique et exprimant, en même temps, le motif très formel de cette déficience. Il est clair d'ailleurs qu'il n'y a que deux cas possibles de déséquilibre, l'un en faveur de la nécessité I, l'autre en faveur de la nécessité F, c'est-à-dire que l'approximation du nécessaire peut se poursuivre par deux voies symétriques, mais non réciproques, et qui ne réalisent que par une compensation laborieuse l'équilibre propre à l'absolu.

Tout de même qu'en mathématiques, l'existence — la nécessité F qui résulte d'une démonstration — n'est jamais en regard de l'être qu'une existence d'emprunt, qui, par l'intermédiaire de l'intelligibilité, subsiste en fonction d'une autre existence, ainsi est-il un cas d'intelligibilité d'emprunt qui s'explique, par l'intermédiaire de l'existence, en fonction d'une autre intelligibilité. La matière est de soi et formellement inintelligible, tandis qu'elle n'est pas formellement inexistante. Le créé promet plus qu'il n'est capable de tenir au point de vue de l'intelligibilité, par là même qu'il recèle un indéfini qui est la négation de l'intelligibilité ; tandis que la forme,

mesurant l'être, le créé, sous ce rapport, ne promet pas, de soi, moins qu'il ne tient. Le nécessaire pris hors du cas mathématique — disons le nécessaire de type φ — se trouve ainsi polarisé vers l'existence et c'est la nécessité F qui y est prépondérante. Il en va à l'inverse du type μ, et nous n'avons pas à y revenir. Marquons simplement ce qui rapproche et ce qui distingue les deux cas. Dans l'un comme dans l'autre il y a un déséquilibre ; on pourrait en traduire le sens par un signe, et il faudrait dire alors que le degré du nécessaire s'attache à la valeur absolue. En d'autres termes, pas plus que dans l'analyse du comportement réciproque des deux aspects du nécessaire, nous n'avons retenu deux implications, nous n'avons à retenir ici deux déséquilibres ; il y a simplement deux aspects du même déséquilibre lequel joue toujours le même rôle en fonction du nécessaire. Et sous ce rapport, le nécessaire jouit d'une sorte d'univocité. Qu'il s'agisse du type μ ou du type φ, le nécessaire qui nous est directement accessible n'est jamais le nécessaire authentique. « Dans la vue de l'infini, tous les finis sont égaux ». D'où vient alors le prestige particulier que le bon sens accorde au type μ ? Il y a là plus qu'un attrait spontané du mystère. Le nécessaire de type μ est en effet une relation, non seulement en droit mais en fait : qu'il emprunte à la loi d'enchaînement ou à la loi d'harmonie, il relie toujours deux éléments — nous employons à dessein ce mot très indéterminé — qui ont moins d'intérêt par eux-mêmes que par leur connexion. La moindre éducation mathématique développe ce sens que le nécessaire se réalise dans la relation. Or le nécessaire étant en droit et formellement relation, le type μ en est par nature plus voisin que le type φ. Le bon sens a donc raison : formellement du moins — précision fort importante — le nécessaire trouve en mathématiques sa réalisation privilégiée.

Ces deux dernières remarques vont à préciser la situation du nécessaire μ, mais elles peuvent encore apporter dans cette même perspective une contribution indirecte. Si en effet, malgré sa ressemblance formelle avec le nécessaire absolu, le nécessaire μ s'en distingue, c'est parce que leurs champs respectifs d'application ne jouissent pas du même coefficient ontologique. L'univocité relative des deux types du nécessaire conduit à cette même conclusion : sous peine de s'identifier, le type μ et le type φ ne peuvent se placer au même niveau ontologique ; et comme chacun de ces types inclut, analogiquement mais nécessairement, les deux aspects F et I, il en résulte qu'il y a une existence mathématique formelle-

ment distincte. Et plus on tient avec rigueur la disjonction des deux types, plus on pose avec fermeté cette existence mathématique comme distincte. C'est à quoi nous nous arrêtons et il n'y a là pour nous qu'un recoupement. Ainsi s'explique au mieux l'apparent paradoxe du nécessaire μ qui, formellement très proche du nécessaire absolu, se trouve en continuité avec les nécessités les plus hautes et marque dans leur ligne un absolu, mais qui, se créant un domaine propre d'application, se trouve sans emprise sur les plus élémentaires réalités.

Fr. M.-L. GUÉRARD DES LAURIERS, O. P.

Le Saulchoir.